CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera teoretică: profil real, specializarea științele naturii
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI-a

1. Să se arate că dacă $A \in M_2(\mathbf{C})$, $A \neq O_2$ și există un număr natural n, n>0 astfel încât $A^n = O_2$ atunci $A^2 = O_2$.

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}), A \neq O_2$ **2p**

$A^n = O_2 \Leftrightarrow det(A^n) = 0 \Leftrightarrow detA = 0 \qquad (1)$

Cum $A^2 - (a+d) \cdot A + detA \cdot I_2 = O_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} A^2 = (a+d) \cdot A \qquad (2)$ **1p**

Se demonstrează prin inducție matematică egalitatea $A^n = (a+d)^{n-1} \cdot A$ **2p**

$$\left.\begin{array}{r} A^n = (a+d)^{n-1} \cdot A \\ A^n = O_2 \\ A \neq O_2 \end{array}\right| \Rightarrow a + d = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} A^2 = O_2$$ **2p**

2. Se consideră funcția de gradul al doilea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ și matricele $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & {x_1}^2 & {x_2}^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.

a) Să se arate că $|det(B)| = 3\sqrt{3}$

b) Să se arate că $A \cdot B = \begin{pmatrix} f(1) & f(x_1) & f(x_2) \\ f(1) & x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) \\ f(1) & {x_1}^2 f(x_1) & {x_2}^2 f(x_2) \end{pmatrix}$

c) Să se arate că $det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

Soluție:

a) Se calculează $det(B) = 3(x_2 - x_1)$. **1p**

Cum x_1 și x_2 sunt rădăcini complexe ale ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, atunci $|det(B)| = |3(x_2 - x_1)| = 3|i\sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$ **1p**

b) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} c+b+a & c+bx_1+a{x_1}^2 & c+bx_2+a{x_2}^2 \\ a+c+b & a+cx_1+b{x_1}^2 & a+cx_2+b{x_2}^2 \\ b+a+c & b+ax_1+c{x_1}^2 & b+ax_2+c{x_2}^2 \end{pmatrix}$$ **0,5p**

Cum $f(1) = a + b + c$ și deoarece ${x_1}^3 = {x_2}^3 = 1$ **1p**

rezultă că $A \cdot B = \begin{pmatrix} f(1) & f(x_1) & f(x_2) \\ f(1) & x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) \\ f(1) & {x_1}^2 f(x_1) & {x_2}^2 f(x_2) \end{pmatrix}$ **1p**

c) $$det(A) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$ **0,5p**

$det(A) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ sau $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$ **0,5p**

Dar, $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2] = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$ **1p**

Așadar, $det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a+b+c=0$ sau $a=b=c$. **0,5p**

3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

a) Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției
b) $g: \boldsymbol{D} \to \mathbf{R}, g(x) = ln(f(x))$, unde $\boldsymbol{D}$ este domeniul maxim de definiție la funcției g
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}[f(1)+f(2)+\ldots+f(x)]^{x^2}$
d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot \left[2017^{f(x)+1} - 2017\right]$

Soluție:

a) Se impun condițiile de existență ale expresiei $g(x) = ln[f(x)], x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$. **0,5p**

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \setminus \{0\}$. Astfel $\boldsymbol{D} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Căutăm asimptotele verticale calculând $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} g(x) = -\infty$, **1,5p**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} g(x) = +\infty$.

În aceste condiții dreptele de ecuații $x = -\frac{1}{2}$ și $x = 0$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției g **0,5p**

b) Deoarece $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ **0,5p**

avem $f(1)+f(2)+\ldots+f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$ **0,5p**

și în aceste condiții $\lim_{x\to\infty}\left[f(1)+f(2)+\ldots+f(x)\right]^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)^{x^2} = \frac{1}{e}$ **1,5p**

c) $\lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left[2017^{f(x)+1}-2017\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2017\cdot f(x)\cdot x^3\cdot\left[2017^{f(x)}-1\right]}{f(x)}=4034\ln 2017$ **2p**

4.

a) Pentru ce valori n$\in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx}{x+x^2}=30$$

b) Să se calculeze: $\lim_{x\to\infty} a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3}$, discuție după $a,b,c\in\mathbb{R}$

Soluție:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx}{x+x^2}=1+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (2p)

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$=30 rezultă n=4...1p

b) $\lim_{x\to\infty} a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(a\sqrt{1+\frac{1}{x}}+b\sqrt{1+\frac{2}{x}}+c\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)=$
$=\infty(a+b+c)\Rightarrow$ L=∞ pentru a+b+c>0; L=$-\infty$ pentru a+b+c <0; L=$\infty 0$ pentru a+b+c=0...2p
Dacă a+b+c=0 avem:L=$\lim_{n\to\infty}(a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}-a\sqrt{n+3}-b\sqrt{n+3})=$
$\lim_{n\to\infty}(a(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3})+b(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})=a\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}-b\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$
=0...2p